Распределение Пуассона.

Представим себе, что мы n раз участвуем в лотерее, шансы выиграть в которой p. p<<1 (как это обычно бывает), но мы не растерялись и играем в неё очень много раз (n>>1). Устремим p к 0, а n к бесконечности так, чтобы их произведение осталось постоянным – θ. θ, как можно понять, маотжидание числа наших выигрышей – за одну попытку матожидание будет p, а за n попыток np=θ.

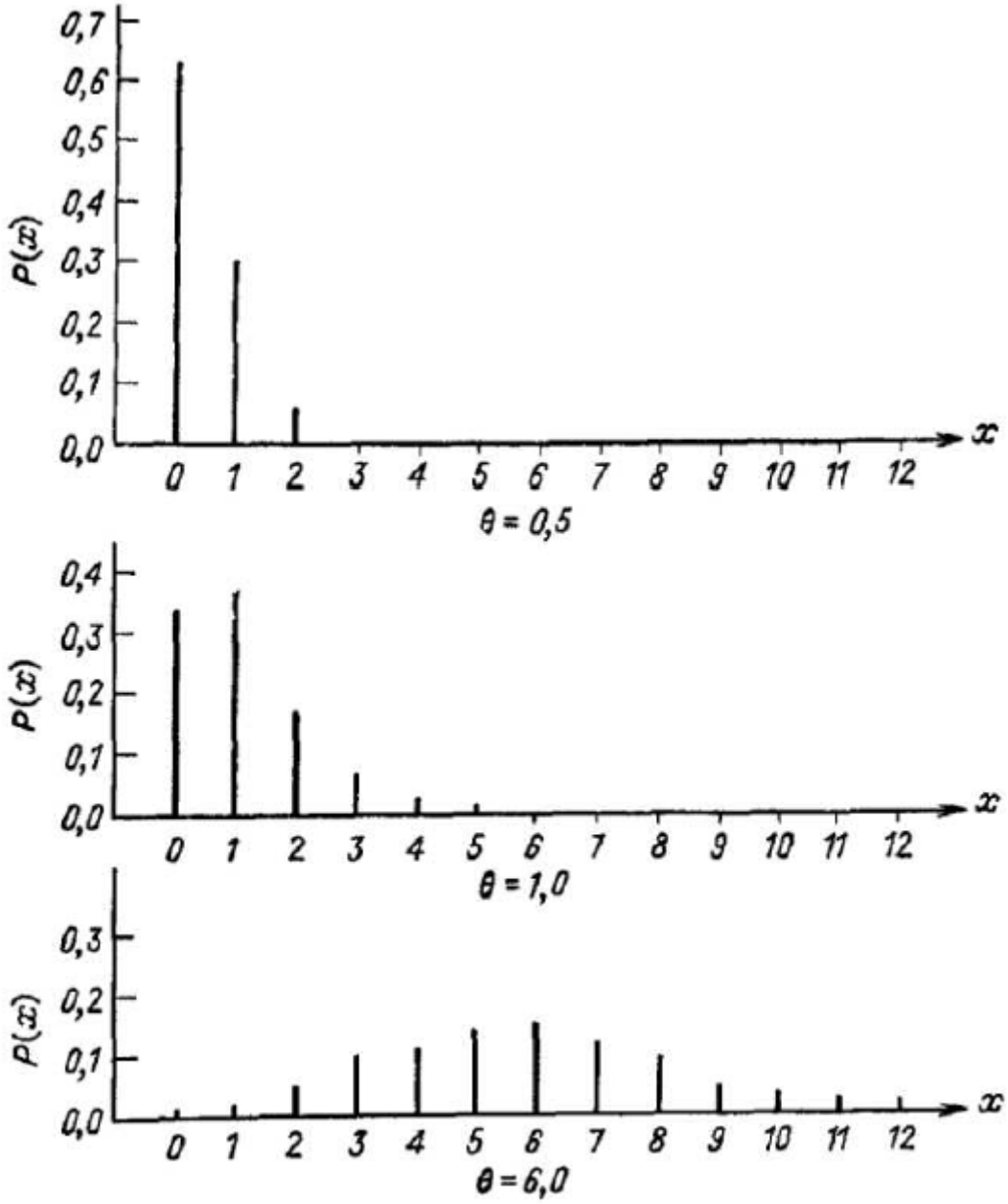

Рис. 1.2: Распределения Пуассона для $\theta = 0.5, 1.0, 6.0$.

Отметим, что распределение Пуассона – дискретное распределение, оно определено только при целых значениях аргумента.

Видно, что при θ=0,5 мы, скорее всего, ни разу не выиграем. При θ=1, скорее всего, мы победим один раз, но вероятность не победить ни разу тоже не мала и составляет около 1/3. Да, если вы 1000 раз сыграете в лотерею, где шанс выиграть 1/1000, вероятность уйти ни с чем 1/3. Грустно, но что ж поделать.

Ну а при θ=6, мы, скорее всего, выиграем 5 или 6 раз.

То, что матожидание будет θ, очевидно (см. выше). Прекрасным неочевидным свойством распределения Пуассона будет то, что тете (да не тёте, а тете. Тете. Греческой букве ☺) будет ещё равна и дисперсия:

$$M(X) = \theta, \quad D(X) = \theta.$$

Форма распределений сильно меняется с изменением параметра. При малых θ распределение является существенно асимметричным, но уже по достижении $\theta \approx 10$ вероятности симметризуются. На рис.1.3 показан случай $\theta = 9$. Хорошо видно, что функция плотности вероятности распределения Гаусса с теми же, что у распределения Пуассона, матожиданием и дисперсией вполне может служить огибающей вероятностей Пуассона. При дальнейшем увеличении θ формы двух распределений продолжают сближение.

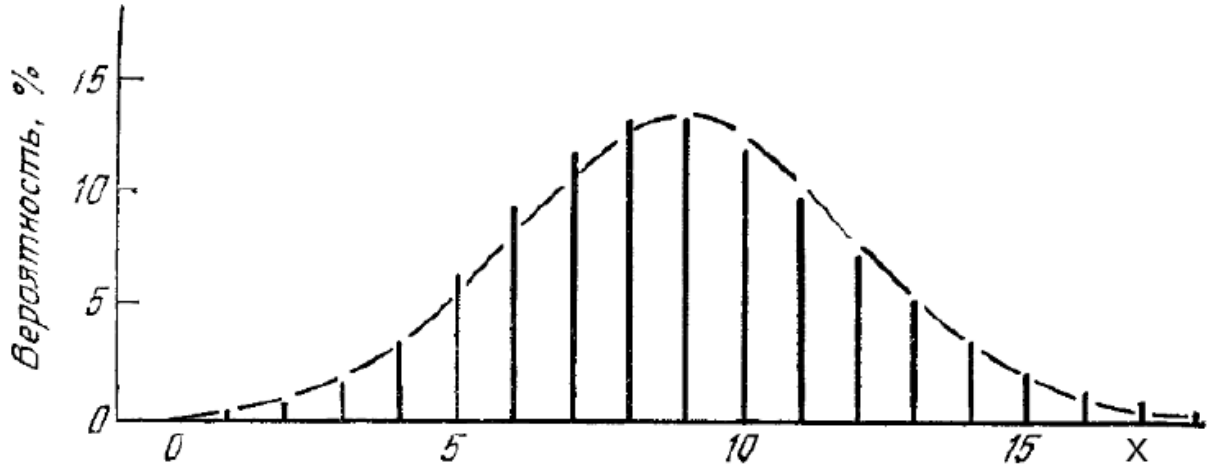

Рис. 1.3: Распределения Пуассона для $\theta = 9.0$. В качестве огибающей нарисована плотность вероятности Гауссова распределения с такими же матожиданием и дисперией.

Напоследок формула для расчёта распределения Пуассона:

$$P(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \quad \text{при } x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Несмотря на то, что функция от x определена для любых неотрицательных x, смысл для распределения Пуассона она имеет только для целых x, потому что, напомню, распределение Пуассона – это дискретное распределение! Мы не можем выиграть в лотерею полраза или полтора, можем только целое число раз.

Два слоя рандома – Пуассон и поверх него погрешность детектора

Теперь про 14 ядерный прак (это где калиевое удобрение, Гейгер и 200 измерений) – там просят проверить, что распределение Пуассоново. Оно действительно будет Пуассоново, если детектор измеряет число частиц абсолютно точно. Но если он, например, не цифровой, а виде стрелки на циферблате, где ещё вдобавок существует погрешность считывания – уже будет не совсем Пуассон, а ухудшенный (более широкий) Пуассон. Если погрешность будет большой – то она может даже превзойти погрешность, связанную с рандомом внутри калиевого удобрения (ту, которая корень из матожидания) – и тогда будет уже совсем не Пуассон, а нечто отвратное.

Давайте ещё раз, чтобы было точно понятно.
Представим, что у нас два счётчика Гейгера – один со средней погрешностью 1 частица, другой с погрешностью 5 частиц.

Число частиц в удобрении, распавшихся за 30 сек	Что намерил первый Гейгер	Что намерил второй Гейгер
20	20	15
27	28	30
25	24	30
18	19	14
30	30	35
24	25	27
19	19	15
22	23	19
26	27	25
20	19	22
17	17	21
25	24	30

Давайте анализировать. В первом столбце у нас ***абсолютно точно*** распределение Пуассона – это прямо следует из теории радиоактивного распада. Во втором столбце у нас немного ухудшенный Пуассон – распределение будет похоже на Пуассона, но не в точности оно **– *из-за погрешности детектора!*** Ну а во втором будет полный разколбас из-за плохого детектора.

Поэтому, когда на 14-том праке говорят «проверьте, что распределение Пуассона», это не для того, чтобы проверить теорию радиоактивного распада (она и так верна), а для того, чтобы убедиться, что детектор работает корректно и не вносит заметной погрешности.